プロスペクト理論によるゼロ価格効果の一般化
A Model of Zero-price Effect based on Prospect Theory

浜田　宏
東北大学

2016/04/07

1　イントロダクション

最初に次のような出来事を想像をしてみてほしい.

ある男がとても空腹で, ピザのデリバリーを頼もうとしていた. ピザは M サイズ (1 人前) が 1000 円で, L サイズ（3 人前）は 2000 円である. L サイズでは一人で食べるには量が多すぎるし, かといって M サイズでは少しもの足りない. 男は悩んだ末, 結局 L サイズを注文することに決めた[1].

さてピザ屋に注文するために電話をかけたところ, 店員が元気な声で，こう教えてくれた.

> ただいまキャンペーン中で, 全てのピザが 1000 円引きになりますよ！

と.

「M サイズは 0 円で, L サイズは 1000 円になるってことかい？」男は少し驚いて問いただした.

「はい. M サイズは 0 円, L サイズは 1000 円ですよ」店員は答えた.

男は少し考えた末, M サイズのピザを注文する事にした.

あなたは, この男の行動をどう思うだろうか？　男が最初に欲しがっていたのは L サイズのピザのはずだ. しかしこのような態度の豹変は, われわれの経験の中にも存在しないだろうか？

2　先行研究

『予想通りに不合理』で行動経済学者ダン・アリエリーは次のような興味深い実験を紹介している（一連の実験の成果は Shampanier, Mazar, and Ariely(2007) が論文として刊行している）.

Shampanier 達は, MIT のカフェテリア利用者（既に何らかの商品を購入した者）に対して, 追加的にチョコレートを買うか否かの選択を提示して, 料金にチョコレート代金を加えるかどうかを観測した.

この状況では被験者によるチョコレートの追加購入に「小銭を取り出すのが煩わしい」という取引コストはかからない, と想定されている（なぜなら, チョコレートを購入しなくてもどのみち別の商品の料金を支払う者が対象だから）.

最初に被験者に次の選択肢を提示する.

[1] きっと,「余った分は冷凍して, 明日食べればいいだろう」とでも考えたのだろう.

- リンツのトリュフチョコ　14 セント
- ハーシーのキスチョコ　1 セント

キャッシャーの横に二種のチョコレートと値段のサインが提示され, 一人一個しか購入できない. この選択肢をカフェテリア利用者に提示したところ, リンツを選択する者が 30%, ハーシーは 8%, どちらも選択しない者が 62%だった (Shampanier, Mazar, and Ariely 2007:748-749).

次に価格をそれぞれ 1 ドルずつ下げた選択肢を使って比較する.

- リンツのトリュフチョコ　13 セント
- ハーシーのキスチョコ　0 セント

その結果, ハーシーを選択する者が 31%, リンツが 13%, 何も選ばない者が 56%となった. この実験結果が示していることは, (14 & 1) 条件の場合に比して, (13 & 0) 条件の場合に無料のハーシーを選択する者が増え, 高価なリンツを選択する者が減少した, ということである. 一見するとこれは不思議なことではないかもしれない. われわれが無料の商品を好むという傾向を持つことはいたって自然なことである.

ゼロ価格アノマリー

さきほどの実験結果に対して費用便益分析を適用する. リンツの価値を $u(L)$, ハーシーの価値を $u(H)$ とおく. 最初の選択では

$$u(L) - 14 > u(H) - 1$$
$$u(L) - 13 > u(H)$$

が成立しており, 二番目の状況では

$$u(L) - 13 < u(H)$$

が成立している. 関数 u がどんな形状であろうと, 二つの不等式は矛盾する. つまり非ゼロ価格条件での選好から, ゼロ価格条件での選好の変化を期待効用理論は説明できない. このような「非ゼロ価格条件で, 高価値商品を選好していても, ゼロ価格条件で低価値商品を選考する」という変化を「ゼロ価格アノマリー」と呼ぶことにしよう.

Shampanier, Mazar, and Ariely(2007) は, ゼロ価格には特別な利得が追加されるというアドホックなモデル（Zero-Price model）で説明を試みている [2].

[2] 概要は以下のようなものである. 製品 X と製品 Y の価値を V_X, V_Y で表し, 価格を P_X, P_Y で表すとき, X を購入する事の必要十分条件は

$$V_X > P_X \quad \wedge \quad V_X - P_X > V_Y - P_Y$$

であり, Y を購入する事の必要十分条件は

$$V_Y > P_Y \quad \wedge \quad V_Y - P_Y > V_X - P_X$$

また Shampanier らは, 実験で観察されたアノマリーはプロスペクト理論の価値関数で表すことができる, と論文中で述べている. 例えば価格条件 (1 & 14) と (0 & 13) の場合, リンツの価値を V_1, ハーシーの価値を V_2, 価値関数を $v(p)$ とおくと, 非ゼロ価格条件でリンツを選択することは

$$V_1 - v(14) > V_2 - v(1) \iff V_1 - V_2 > v(14) - v(1)$$

一方, ゼロ価格条件でハーシーを選択することは

$$V_1 - v(13) < V_2 - v(0) \iff V_1 - V_2 < v(13) - v(0)$$

と表すことができる (ただし $v(0) = 0$). まとめると

$$v(14) - v(13) < v(1)$$

である. 彼らは関数 v が凹 (concave) であるとき, 実験結果を説明できるかどうかが問題であると述べている（Shampanier, Mazar, and Ariely 2007）. ただし, どのような価値関数のパラメータで, またどのような価格の組み合わせでアノマリーが成立するのかという条件は明示していない.

そこで以下, プロスペクト理論の価値関数が仮定する関数の凹性（独立変数が負の領域, すなわち損失領域では関数の凸性）が, ゼロ価格アノマリーの必要条件であることを一般的に示す. またゼロ価格条件下で選好が逆転する誘因を最大化する条件, すなわちゼロ価格効果最大化条件（Max Zero-price effect condition）を特定する.

価値関数の導入

価値関数 $v(y)$ として

$$v(y) \begin{cases} > 0, & y > 0 \\ = 0, & y = 0 \\ < 0, & y < 0 \end{cases}$$

を定義する. 関数 v は

$$y > 0 \Longrightarrow v'(y) > 0, v''(y) < 0, v \text{ は凹関数}$$
$$y < 0 \Longrightarrow v'(y) > 0, v''(y) > 0, v \text{ は凸関数}$$

を満たすと仮定する.

条件を満たす具体的な関数のグラフを図に示す.

である. 価格が共に ε 減少した場合,

$$V_X > P_X - \varepsilon \quad \wedge \quad V_X - P_X > V_Y - P_Y, \quad V_Y > P_Y - \varepsilon \quad \wedge \quad V_Y - P_Y > V_X - P_X$$

となる. X の価格がゼロになった時, それまで Y を選好していた個人が X に選択を変える状況は

$$V_Y > P_Y, V_Y - P_Y > V_X - P_X$$
$$V_X + \alpha > 0, \quad \wedge \quad V_X + \alpha - P_X > V_Y - P_Y$$

と表される (Shampanier, Mazar, and Ariely 2007).

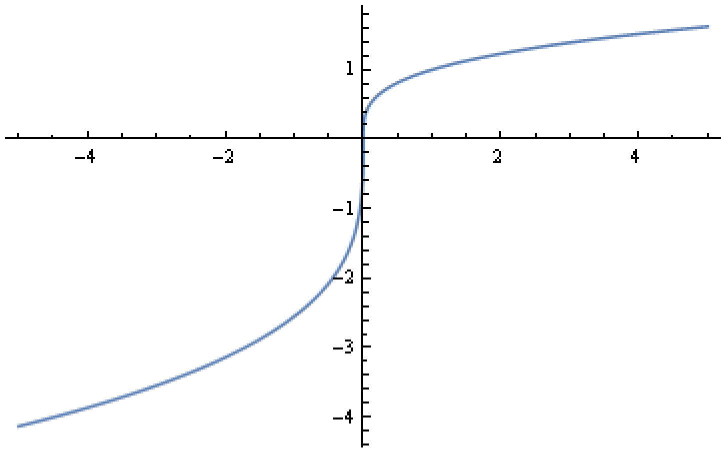

図 1: 価値関数 $v(x)$ のグラフ

価値関数 v は引数が負の場合, 例えば $y > 0$ とおいて, 引数が $-y$ のとき

$$v(-y) < 0$$

となることに注意する. 以下価格を $a > 0$ で表すので, a を支払った場合の効用は

$$v(-a) < 0$$

である. 価値関数は引数が負の時, 出力が負となるので注意する.

不等式の成立条件

製品 1 の価値を v_1, 価格を a, 製品 2 の価値を v_2, 価格を $pa, (0 < p < 1)$ とおく. また $v_1 > v_2$ を仮定する. $0 < p < 1$ の条件から $a > pa$ である. つまり製品 1 は製品 2 よりも高価値で価格が高い.

価値関数を使って, 製品 1 が選ばれる条件を書けば

$$v_1 + v(-a) > v_2 + v(-pa) \iff v_1 - v_2 > v(-pa) - v(-a)$$

である. 次に二つの製品価格から共に pa だけ価格が下がり, 製品 2 がゼロ価格になったとき, 製品 2 が選ばれる条件は

$$v_1 + v(-(a - pa)) < v_2 + v(-(pa - pa)) \iff v_1 - v_2 < -v(-(a - pa))$$

である. 二つの不等式をつなげると

$$\begin{aligned}
& - v(-(a - pa)) > v_1 - v_2 > v(-pa) - v(-a) \\
\Longrightarrow & - v(-(a - pa)) > v(-pa) - v(-a) \\
\iff & v(-a) - v(-pa) - v(-(a - pa)) > 0
\end{aligned}$$

となる.

命題 1. 関数 v が負の領域で凸ならば,

$$v(-a) - v(-pa) - v(-(a - pa)) > 0$$

が成立する.

証明. 価格 a は定数と見なして,

$$f(p) = v(-a) - v(-pa) - v(-(a - pa)), \quad 0 < p < 1$$

とおく. 一階導関数は

$$\frac{df(p)}{dp} = av'(-pa) - av'(ap - a)$$

である. $f'(p)$ が 0, 正, 負になる条件は「$v'(y) > 0$ かつ $y < 0$ ならば $v''(y) > 0$」という凸性の条件を用いれば, それぞれ

$$\begin{aligned}
f'(p) = 0 &\iff av'(-pa) - av'(ap - a) = 0 \\
&\iff -pa = ap - a \iff p = \frac{1}{2} \\
f'(p) > 0 &\iff av'(-pa) > av'(ap - a) \\
&\iff -pa > ap - a \quad (y < 0 \text{ ならば } v''(y) > 0 \text{ を使った}) \\
&\iff p < \frac{1}{2} \\
f'(p) < 0 &\iff av'(-pa) < av'(ap - a) \\
&\iff -pa < ap - a \quad (y < 0 \text{ ならば } v''(y) > 0 \text{ を使った}) \\
&\iff p > \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

である. つまり関数 $f(p)$ は $0 < p < 1/2$ の範囲で増加して, $1/2 < p < 1$ の範囲で減少する. また $p = 0$ での右側極限と, $p = 1$ における左側極限を考えると

$$\lim_{\substack{p>0 \\ p\to 0}} f(p) = 0, \quad \lim_{\substack{p<1 \\ p\to 1}} f(p) = 0$$

だから, 関数 $f(p)$ は $0 < p < 1$ の範囲で正であり, $p = 1/2$ の点で最大値を持つことが分かる. よって, v が凸であるとき,

$$v(-a) - v(-pa) - v(-(a - pa)) > 0 \iff v(-pa) - v(-a) < -v(-(a - pa))$$

が示せた. □

命題 2. 関数 v が負の領域で凸であるとき, 開区間 $(v(-pa) - v(-a), -v(-(a - pa)))$ 内に $v_1 - v_2$ が存在すれば, ゼロ価格アノマリーが発生する.

証明. 命題 1 より，関数 v が負の領域で凸ならば,

$$v(-a) - v(-pa) - v(pa - a) > 0$$

が成立する．このとき $v_1 - v_2$ が開区間 $(v(-pa) - v(-a), -v(-(a - pa)))$ 内に存在すれば, 不等式

$$-v(pa - a) > v_1 - v_2 > v(-pa) - v(-a)$$

が成立する. このことはゼロ価格アノマリーの発生を意味する. □

関数 v が負の領域で凸だからといって必ずゼロ価格アノマリーが発生するとは限らない．例えば非ゼロ価格条件で高価格製品が選ばれているとき

$$v_1 - v_2 > v(-pa) - v(-a)$$

が成立し，ゼロ価格条件でも高価格製品が選ばれるならば

$$v_1 - v_2 > -v(pa - a)$$

が成立する．v が負の領域で凸ならば必ず $-v(pa - a) > v(-pa) - v(-a)$ だから，必然的に

$$v_1 - v_2 > -v(pa - a) > v(-pa) - v(-a)$$

である．

同様に，常に低価格商品が選ばれる場合は

$$-v(pa - a) > v(-pa) - v(-a) > v_1 - v_2$$

となっている．高価格製品価値 v_1 と低価格製品価値 v_2 の差がどのくらいの大きさであるかに依存して選好の変化が生じるのである．

命題 3 (損失の差の最大化条件)**.** 低価値商品の価格が, 効果値商品の価格の半分の時, 損失の差 $v(-a) - v(-pa) - v(pa - a)$ が最大化する．

証明. 命題 1 の証明で示したように, $p = 1/2$ のとき, 関数

$$f(p) = v(-a) - v(-pa) - v(-(a - pa))$$

が最大値をとる. その結果開区間 $(v(-pa) - v(-a), -v(-(a - pa)))$ も最大化する. □

ただし，上記の命題が成立する場合に，ゼロ価格条件で選好が逆転する誘因が最も高いといえるかどうかは検討の余地がある.

具体例

カーネマンとトバスキーが定義した具体的な価値関数を用いて, 命題の成立を確認しておこう. 価値関数の具体例として

$$v(y) = \begin{cases} y^z, & y \geq 0 \\ -\lambda(-y)^x, & y < 0 \end{cases}$$

を導入する. パラメータは $\lambda > 0, 0 < x < 1$ を仮定する. 価値関数 v は引数が負の場合, 例えば $y > 0$ とおいて, 引数が $-y$ のとき

$$v(-y) = -\lambda(-(-y))^x = -\lambda(y)^x$$

となることに注意する. 以下価格を $a > 0$ で表すので, a を支払った場合の効用は

$$v(-a) = -\lambda(-(-a))^x = -\lambda(a)^x < 0$$

である. 価値関数は引数が負の時, 出力が負となるので注意する.

まず初期条件で製品 1 が選ばれていることを

$$\begin{gathered} v1 + v(-a) = v_1 - \lambda(a)^x > v2 + v(-b) = v_2 - \lambda(b)^x \\ \iff v_1 - v_2 > \lambda(a)^x - \lambda(b)^x \end{gathered}$$

で表す. 次に価格が共に b 低下して製品 2 がゼロ価格になった時, 製品 2 が選ばれる状況を

$$\begin{gathered} v1 + v(-(a-b)) = v_1 - \lambda(a-b)^x < v_2 + v(-(b-b)) = v_2 - \lambda(b-b)^x \\ \iff v_1 - v_2 < \lambda(a-b)^x \end{gathered}$$

と表す. この二つが同時に成立することは

$$\lambda(a-b)^x > v_1 - v_2 > \lambda(a)^x - \lambda(b)^x$$

を意味する. λ で除して整理すれば $(a-b)^x > a^x - b^x$ となる. よってアノマリーが生じることの必要条件は

$$(a-b)^x > a^x - b^x, \quad a > b, 0 < x < 1$$

である. つまりこの不等式が成立し, 開区間 $(a^x - b^x, (a-b)^x)$ 内に価格差 $v_1 - v_2$ が存在すればゼロ価格条件アノマリーが生じる.

以下, $a > b > 0, 0 < x < 1$ という条件下で

$$f(a, b, x) = (a-b)^x - (a^x - b^x)$$

の変化を分析する. 価格に関する条件 $a > b > 0$ から, 一般性を損なうことなく, 低価格 b を $b = pa(0 < p < 1)$ で表すことができる.

$$f(a, b, x) = f(a, p, x) = (a - ap)^x - (a^x - (ap)^x)$$

いま, $f(a,p,x)$ を p で微分すると,

$$\frac{\partial f(a,p,x)}{\partial p} = -a(a-ap)^{x-1} + a(ap)^{x-1}$$

である. この導関数が正になる条件を調べてみると

$$\begin{aligned} -a(a-ap)^{x-1} + a(ap)^{x-1} &> 0 \\ &\iff a - ap > ap \\ &\iff p < \frac{1}{2} \end{aligned}$$

だから，一階導関数は, $0 < p < 1/2$, かつ $0 < x < 1$ の範囲で常に正である. 逆に $p > 1/2$ ならば一階導関数は常に負である．そして前後の様子から $p = 1/2$ の点で $f(a,p,x)$ は最大値を持つ．また $p = 0$ における右側極限と $p = 1$ における左側極限を考えると

$$\lim_{p \to 0+} f(a,p,x) = 0, \lim_{p \to 1-} f(a,p,x) = 0$$

だから，$0 < p < 1/2$, かつ $0 < x < 1$ の範囲で $f(a,p,x) > 0$ である [3].

命題としてまとめると

命題 4. $a > b > 0, 0 < x < 1$ とおく. このとき商品価値の差 $v_1 - v_2$ が

$$(\lambda a^x - \lambda b^x, \lambda(a-b)^x)$$

内に存在すれば, ゼロ価格アノマリーが生じる

証明. 前節の考察で示したとおり, $a > b > 0, 0 < x < 1$ の条件で,

$$\lambda a^x - \lambda b^x < \lambda(a-b)^x$$

が成立する. 商品価値の差 $v_1 - v_2$ が開区間 $(\lambda a^x - \lambda b^x, \lambda(a-b)^x)$ 内に存在すれば,

$$\lambda a^x - \lambda b^x < v_1 - v_2, \quad v_1 - v_2 < \lambda(a-b)^x$$

が同時に成立する. 前者は非ゼロ価格条件での高価値商品 1 への選好を, 後者はゼロ価格条件での低価値商品 2 への選好を表している. □

ゼロ価格アノマリー発生条件の含意

本論文で証明した命題の直感的な意味を確認しておこう.

Shampanier らは実験によってゼロ価格が期待効用理論の観点からすると特別であり，アノマリーを生み出すことを示した (Shampanier, Mazar, and Ariely 2007).

一方われわれは, ゼロ価格がアノマリーを生み出す条件を数学的に特定した.

今後われわれの予想が正しいかどうかを p の条件を比較する実験で検証する必要があるだろう．

[3] なお

$$\begin{aligned} f(a, 1-p, x) &= (a - a(1-p))^x - (a^x - (a(1-p))^x) \\ &= (a - ap)^x - (a^x - (ap)^x) \\ &= f(a,p,x) \end{aligned}$$

だから, p の範囲は, 実質的には $0 < p < 1/2$ を考えればよいことが分かる.

文献

Kahneman, Daniel and Amos Tversky, 1979, Prospect Theory: An Analysis of Decision under Risk, *Econometrica*, Vol. 47, No. 2: 263-292.

Shampanier, Kristina, Nina Mazar, and Dan Ariely (2007), "Zero as a Special Price: The True Value of Free Products." *Marketing Science*. Vol. 26, No. 6: 742-757.

Rabin, Matthew and Richard H. Thaler, 2001, Risk Aversion, *The Journal of Economic Perspectives*, Vol.15, No.1:219-232.

Rabin, Matthew, 2000, Risk Aversion and Expected-Utility Theory: A Calibration Theorem, *Econometrica*, Vol.68, No.5:1281-1292.